Distribuzione δ

Carlo Oleari

La δ di Dirac è una distribuzione (o funzione generalizzata) definita dal seguente integrale ($a < b$)

$$\int_a^b dx\, f(x)\, \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & a < x_0 < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{1}$$

dove $f(x)$ è una funzione sufficientemente regolare nell'intorno di x_0. Inoltre, x_0 deve appartenere all'intervallo di integrazione. Altrimenti l'integrale è zero. Dalla (1) segue immediatamente che

$$\int dx\, \delta(x - x_0) = 1 \tag{2}$$

e, con un semplice cambio di variabili nell'integrale, che

$$\delta(a\,(x - x_0)) = \frac{1}{|a|}\, \delta(x - x_0)\,. \tag{3}$$

A partire dall'eq. (1), possiamo anche dare un significato alle derivate della delta. Per esempio, integrando per parti ($a < x_0 < b$)

$$\begin{aligned} \int_a^b dx\, f(x)\, \frac{d}{dx}\delta(x - x_0) &= \int_a^b dx\, \frac{d}{dx}\left[f(x)\, \delta(x - x_0)\right] - \int_a^b dx\, \frac{df(x)}{dx}\, \delta(x - x_0) \\ &= f(x)\, \delta(x - x_0)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, \frac{df(x)}{dx}\, \delta(x - x_0) \\ &= -\int_a^b dx\, \frac{df(x)}{dx}\, \delta(x - x_0) = -\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Quindi possiamo scrivere in modo formale

$$\frac{d}{dx}\delta(x - x_0) = -\delta(x - x_0)\frac{d}{dx}\,. \tag{5}$$

Le derivate di ordine superiore si calcolano integrando ripetutamente per parti, scaricando una alla volta le derivate dalla δ sulla funzione.

La funziona a gradino

Dalla definizione (1) si può scrivere (a è un parametro dato)

$$\int_{-\infty}^x dy\, \delta(y - a) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x > a \end{cases} \equiv \theta(x - a) \tag{6}$$

chiamata anche "funzione θ". Derivando l'equazione si può dare significato preciso alla derivata di un gradino

$$\frac{d}{dx}\theta(x - a) = \delta(x - a) \tag{7}$$

Importante identità
Una relazione molto importante è la seguente

$$\delta\left[g(x)\right] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|dg/dx(x_i)|}\,, \tag{8}$$

dove gli x_i sono le radici (semplici) di $g(x)$ nell'intervallo di integrazione.

"Rappresentazioni" della $\boldsymbol{\delta}$
In generale, ogni funzione "molto piccata", normalizzata a 1 e con la larghezza che va a zero, può essere usata come "rappresentazione" della distribuzione δ.

1. $$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} R(x, \epsilon) \tag{9}$$

   dove

   $$R(x, \epsilon) = \begin{cases} 0 & x < -\epsilon \\ \dfrac{1}{2\epsilon} & -\epsilon < x < \epsilon \\ 0 & x > \epsilon \end{cases} \tag{10}$$

2. $$\delta(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} \tag{11}$$

3. $$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \tag{12}$$

4. $$\delta(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 x^2) \tag{13}$$

5. $$\delta(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{\pi \alpha x^2} \tag{14}$$

6. $$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = \mathrm{VP}\, \frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \tag{15}$$

   dove "VP" indica l'integrazione fatta in Valor Principale, ovvero, se $a < 0 < b$ e $\epsilon > 0$

   $$\mathrm{VP} \int_a^b dx\, \frac{1}{x}\, f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_a^{-\epsilon} dx\, \frac{1}{x}\, f(x) + \int_\epsilon^b dx\, \frac{1}{x}\, f(x) \right\} \tag{16}$$

Esercizio: Dimostrare l'eq. (8).

Esercizio: Verificare che le funzioni dall'eq. (9) all'eq. (15) sono normalizzate a 1.

Esercizio
Dimostare che

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \, \frac{\delta(1-x-y)}{(ax+by)^2} = \frac{1}{ab}$$

Esercizio
Dimostare che

$$2\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \, \frac{\delta(1-x-y-z)}{(ax+by+cz)^3} = \frac{1}{abc}$$

Esercizio
Dimostare che

$$6\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \, y \, \frac{\delta(1-x-y-z)}{(ax+by+cz)^4} = \frac{1}{ab^2c}$$